

UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE AL ESTUDIO DEL RÉGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS

TEMA 8

APLICACION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE AL ESTUDIO DEL REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS

	$F(s)$	$f(t) \qquad 0 \le t$
11.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left[\alpha - \dfrac{b(\alpha-a)}{b-a}e^{-at} + \dfrac{a(\alpha-b)}{b-a}e^{-bt}\right]$
12.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
13.	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
14.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}]$
15.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \dfrac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
16.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
17.	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen} \omega t$
18.	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
19.	$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t+\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
20.	$\dfrac{s \sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}(\omega t+\theta)$
21.	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
22.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{\alpha}{\omega^2} - \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
23.	$\dfrac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{e^{-at}}{a^2+\omega^2} + \dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t-\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{a}$
24.	$\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{-at}\operatorname{sen} bt$
24a.	$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$
25.	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
26.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}$
27.	$\dfrac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2} + \dfrac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
27a.	$\dfrac{1}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{1}{\omega_n^2} - \dfrac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi = \cos^{-1}\zeta$

$F'(t) = p\,\bar{f}(p) - F(0)$

$F''(t) = p^2\,\bar{f}(p) - p\,F(0) - F'(0)$

$F'''(t) = p^3\,\bar{f}(p) - p^2\,F(0) - p\,F'(0) - F''(0)$

	$F(s)$	$f(t) \qquad 0 \le t$
28.	$\dfrac{s+\alpha}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+b^2} + \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}}\,e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a} - \tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
29.	$\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2} + \dfrac{e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi)}{b\sqrt{(c-a)^2+b^2}} \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
30.	$\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c(a^2+b^2)} - \dfrac{e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+ \dfrac{e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi)}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{-a} + \tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
31.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{c(a^2+b^2)} + \dfrac{(c-\alpha)e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+ \dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a} - \tan^{-1}\dfrac{b}{-a} - \tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
32.	$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$
33.	$\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
34.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}[\alpha-\alpha e^{-at}+a(a-\alpha)te^{-at}]$
35.	$\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_0}{ab} + \dfrac{a^2-\alpha_1 a+\alpha_0}{a(a-b)}e^{-at} - \dfrac{b^2-\alpha_1 b+\alpha_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
36.	$\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha_0}{c^2} + \dfrac{1}{bc}[(a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0)^2$ $+ b^2(\alpha_1-2a)^2]^{1/2}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b(\alpha_1-2a)}{a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0} - \tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$ $c^2 = a^2+b^2$
37.	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{(1/\omega)\operatorname{sen}(\omega t+\phi_1) + (1/b)e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi_2)}{[4a^2\omega^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2]^{1/2}}$ $\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{-2a\omega}{a^2+b^2-\omega^2}$ $\phi_2 = \tan^{-1}\dfrac{2ab}{a^2-b^2+\omega^2}$

Aplicacion de la Transformada de Laplace al estudio del regimen transitorio en circuitos.

INTRODUCCION.

El objeto promordial de este tema es la aplicacion de la transformada de Laplace al estudio del regimen transitorio, por lo tanto se empieza recordando los distintos regimenes de funcionamientode un circuito electrico, para a continuacion estudiar la transformada de Laplace. El estudio matematico puro de la transformada de Laplace se soslaya en la medida posible, ya que la idea primordialen su aplicacion para la obtencion de unos resultados y la aplicacion de estos desde el punto de vista fisico, no parandose en el formulismo o resultados matematicos, ya que esta es la verdadera utilidad de la transformada de L Laplace : Mediante artificios matematico s y algebraicos se obtienen soluciones de ecuaciones integrodiferenciales que desde el punto de vista fisico, nos dan informacion del comportamiento de un circuito a lo, largo del tiempo ante diversos, tipos de excitaciones.

El tema lo descomponemos en los siguientes apartados:

a) Distintos regimenes de funcionamiento de las redes electricas.

b) Definicion de la Transformada de Laplace. Condiciones de existencia de la transformada de una funcion.

c) Propiedades de La transformada de Laplace.

d) Transformada de Laplace de las funciones excitacion mas utilizadas.

e) Resolucion general de un circuito.

f) Introduccion de las condiciones iniciales existes en un circuito.

g) Transformadas inversas de Laplace.

h) Interpretacion de las soluciones.

a) DISTINTOS REGIMENES DE FUNCIONAMIENTO DE LAS REDES ELECTRICAS.

Podemos distinguir los siguientes tipos de regimenes de funcionamiento:

Regimen libre.

Regimen forzado.

Regimen transitorio.

Regimen permanente.

El regimen libre es el producido por la respuesta a una excitacion instantanea que actua un tiempo infinitesimo, o despues de terminada la excitacion de duracion finita.

Regimen forzado ,es el producido por una excitacion externa y que sigue la misma ley de variacion que la excitacion externa.

Regimen transitorio , es la respuesta obtenida inmediatamente despues de introducida la excitacion y estando esta presente .

Regimen permanente, es la respuesta a una excitacion aplicada en un tiempo muy anterior al considerado.

Este trabajo se referirá preferentemente al estudio del regimen transitorio.

b) DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Dada una funcion $F(t)$ especificada para $t>0$, se define la transformada de Laplace, de $F(t)$ y se representa por $L\{F(t)\}$ como sigue:

$$L\{F(t)\} = f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot F(t)\,dt$$

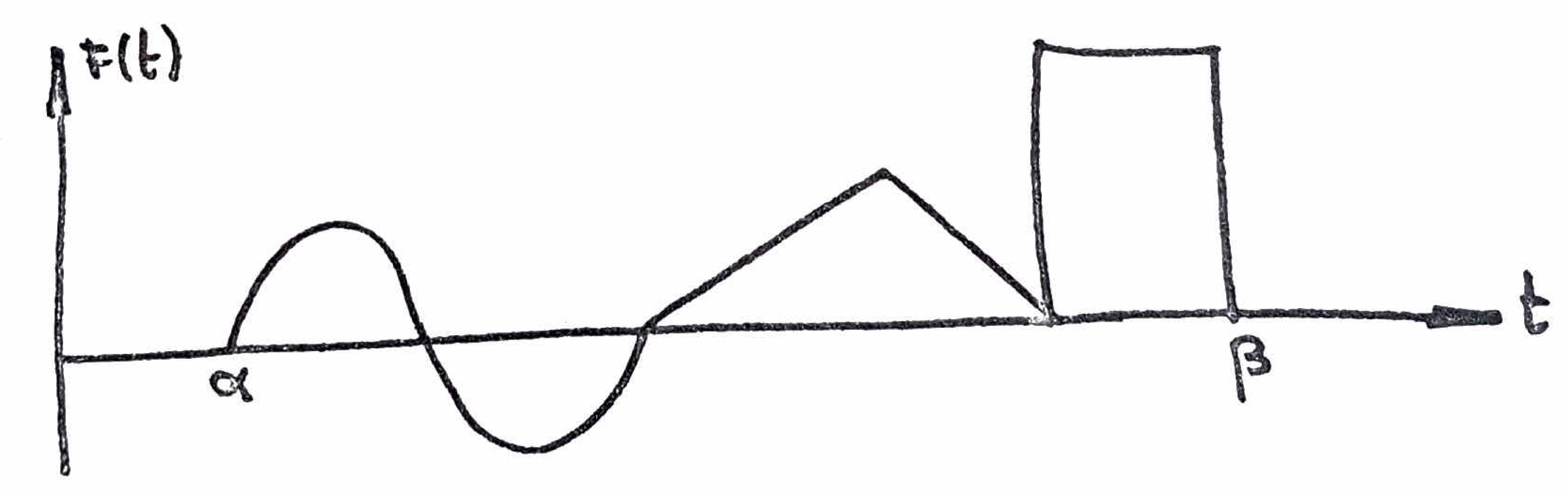
donde el parámetro p puede serv real o complejo.

Las condiciones de existencia de la transformada de Laplace para una funcion $F(t)$ son:

$F(t)$ ha de ser parcialmente contínua y

$F(t)$ ha de ser de orden exponencial.

Se dice que una funcion es parcialmente continua en un intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ si este intervalo puede ser subdividido en un número finito de intervalos y en cada uno de estos la funcion es contínua y tiene límite , tanto por la derecha como por la izquierda. Ejemplo de esta función es :



Se dice que una función es de orden exponencial γ cuando tomada una constante real $M>0$ se verifica que : $\left|e^{-\gamma t} \cdot F(t)\right| < M$ ó $|F(t)| < M \cdot e^{\gamma t}$

para todo intervalo de existencia de la F(t).

Ejemplo 1 .- $F(t) = t^2$, es de orden exponencial 3 ($\gamma=3$; $M=1$) , ya que el módulo

d

de t^2 es menor que e^{3t}_3 para todo $t > 0$.

Ejemplo 2.- $F(t)=e^{t^3}$, no es de orden exponencial ya que $|e^{t^3}| \nless e^{t^3} \cdot e^{\gamma t}$ para $t>0$ y para cualquier valor de γ.

Por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema : Si F(t) es parcialmente contínua en cualquier intervalo finito $0 \leq t \leq M$ y de orden exponencial γ , existe su transformada de Laplace f(p).

===========

c) PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Linealidad.

Si
$$L\{F_1(t)\} = f_1(p)$$
$$L\{F_2(t)\} = f_2(p)$$
$$\vdots$$
$$L\{F_n(t)\} = f_n(p)$$

$$L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\} + \cdots + L\{f_n(t)\} = f_1(p) + f_2(p) + \cdots + f_n(p) =$$

$$= \int_0^\infty F_1(t)\, e^{-pt} dt + \int_0^\infty F_2(t)\, e^{-pt} dt + \cdots + \int_0^\infty F_n(t)\, e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_n(t)\right] . e^{-pt} dt = \int_0^\infty F(t)\, e^{-pt} dt =$$

$$= L\{F(t)\} = L\{F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_n(t)\}$$

Translación.

Si la transformada de F(t) es f(p) , veamos cual es la $L\{e^{at}.F(t)\}$;

$$L\{e^{at}.F(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} . e^{at} . F(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} . F(t) dt = (\text{Haciendo } p-a=q)$$

$$= \int_0^\infty e^{-qt} F(t) dt = f(q) = f(p-a)$$

Cambio de escala.

Si $L\{F(t)\} = f(p)$, cula será la $L\{F(at)\}$

$$L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} F(at)\, dt \quad \left(\text{Haciendo el cambio } t = \frac{u}{a} ; dt = \frac{1}{a} . du\right)$$

$$= -\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \int_0^t F(t).dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt}.F(t)dt =$$

$$= \left| -\frac{1}{p} e^{-pt} \left[\varphi(t) - \varphi(0) \right] \right|_0^\infty + \frac{1}{p} L\{F(t)\} =$$

$$= -\frac{1}{p} \cdot \left[e^{-\infty} \left(\varphi(\infty) - \varphi(0) \right) \right] + \frac{1}{p} e^0 \left[\left(\varphi(0) - \varphi(0) \right) \right] + \frac{1}{p} \cdot f(p) =$$

$$= \frac{1}{p} f(p)$$

d) TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LAS FUNCIONES DE EXCITACION MAS UTILIZADAS EN TEORIA DE CIRCUITOS.

De todos es conocido las funciones matemáticas que nos vamos a encontrar en el análisis de circuitos. Por mencionar unas cuantas recordaremos : Constantes , funciones sunusoidales , funciones escalón , ondas cuadradas , onda triangular, etc...,

Puede imaginarse que si con cada circuito y en cada caso, hubieramos de calcularnos la integral de definición de la transformadaa de Laplace , a pesar de su gran utilidad , seria excesivamente laborioso; por esto , es por lo que existen tablas extensísimas de pares de transformadas de Laplace , que cubren casi todos los tipos de funciones usuales en la teoría de circuitos. Unicamente a tipo de ejemplo y en el caso de que no se tuviera a mano las tablas de pares de transformadas de Laplace , damos algunos ejemplos de su cálculo:

Transformada de Laplace de $F(t) = E$.

Por la propia definición: $L\{E\} = \int_0^\infty E.e^{-pt}.dt = \frac{E}{p}$

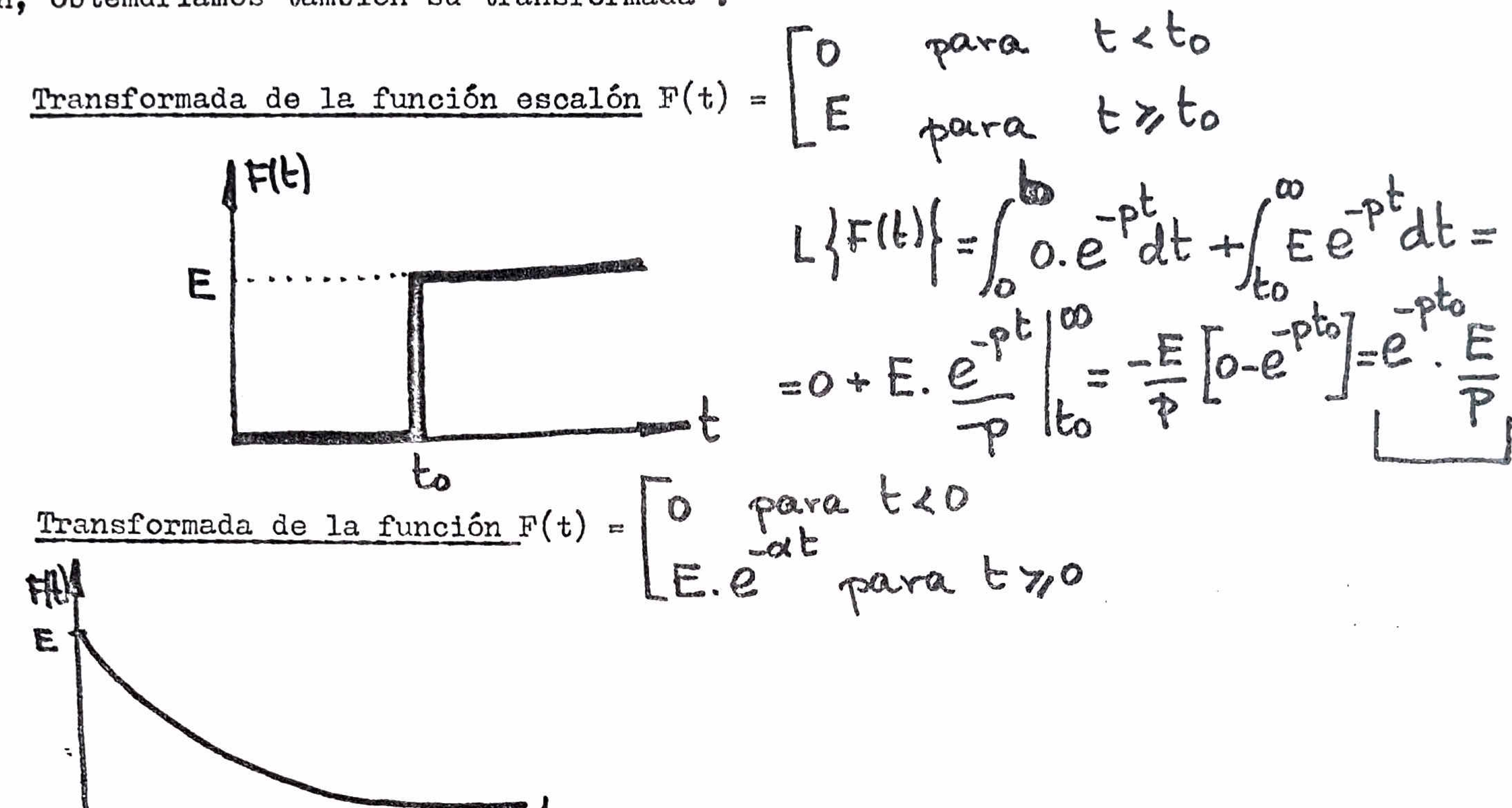
Transformada de Laplace de $F(t) = \begin{cases} E & \text{para } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{para } t > t_0 \end{cases}$

Como siempre aplicando la definición:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty F(t).e^{-pt}dt = \int_0^{t_0} E e^{-pt}dt + \int_{t_0}^\infty 0.e^{-pt}dt = E.\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{t_0} = \frac{E(1-e^{-pt_0})}{p}$$

Si no estuviera el origen del impulso en $t=0$, aplicando el teorema de la translación, obtemdríamos tambien su transformada .

<u>Transformada de la función escalón</u> $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0 \\ E & \text{para } t \geq t_0 \end{cases}$



$$L\{F(t)\} = \int_0^{t_0} 0 . e^{-pt} dt + \int_{t_0}^{\infty} E\, e^{-pt} dt =$$

$$= 0 + E . \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_{t_0}^{\infty} = -\frac{E}{p}\left[0 - e^{-pt_0}\right] = e^{-pt_0} . \frac{E}{p}$$

<u>Transformada de la función</u> $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ E . e^{-\alpha t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$

Apdicando la definición :

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} E . e^{-\alpha t} . e^{-pt} dt = E . \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+p)t} dt = \frac{E}{p+\alpha}$$

<u>Transformada de una función periódica de periodo T</u> .

Por definición ; $L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} . F(t) . dt =$

$$= \int_0^{T} e^{-pt} F(t)\, dt + \int_T^{2T} e^{-pt} . F(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-pt} F(t) dt + \ldots\ldots$$

Si en la segunda integral, hacemos el cambio $t = u + T$; en la tercera $t = u + 2T$; en la cuarta $t = u + 3T$, etc.... con lo que los limites de las integrales puedarán todas de 0 a T ; luego

$$= \int_0^{T} e^{-pu} F(u)\, du + \int_0^{T} e^{-p(u+T)} F(u+T) du + \int_0^{T} e^{-p(u+2T)} F(u+2T) dt + \ldots$$

y por ser la función periódica de periodo T, se cumplirá que : $F(u) = F(u+T) = F(u+2T) = \ldots\ldots$

Luego $L\{F(t)\} =$

$$= \int_0^T e^{-pu} \cdot F(u)\,du + \int_0^T e^{-pu} \cdot e^{-pT} F(u)\,du + \int_0^T e^{-pu} \cdot e^{-2pT} F(u)\,du + \cdots =$$

$$= \left[1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \cdots\right] \cdot \int_0^T e^{-pu} F(u)\,du \,.$$

Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r = e^{-pT}$

$$S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^{-pT}}$$

Luego

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{1-e^{-pT}} \cdot \int_0^T e^{-pu} F(u)\,du$$

Transformadas de Laplace de senwt y coswt.

Aplicando la definición:

$$L\{\operatorname{sen} wt\} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} wt\,dt$$

$$L\{\cos wt\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \cos wt\,dt.$$

Estas integrales pueden calcularse, mediante fórmulas de recurrencia; aplicando la fórmula de Euler etc... Pero, vamos a hacerlo por otro método, mediante el cual, se obtienen las dos a la vez:

Sabiendo que $e^{wtj} = \cos wt + j \operatorname{sen} wt$, y $\sqrt{-1} = j$

$$L\{\cos wt\} + j \cdot L\{\operatorname{sen} wt\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos wt\,dt + j \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} wt\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot [\cos wt + j \operatorname{sen} wt] \, dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{wtj} \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(p-jw)t} \, dt = \left. \frac{e^{-(p-jw)t}}{-(p-jw)} \right|_0^{\infty} = \left(\frac{0}{-(p-jw)} - \frac{1}{-(p-jw)} \right) =$$

$$= \frac{1}{p-jw} = \frac{p+jw}{p^2+w^2} = \frac{p}{p^2+w^2} + j \frac{w}{p^2+w^2}$$

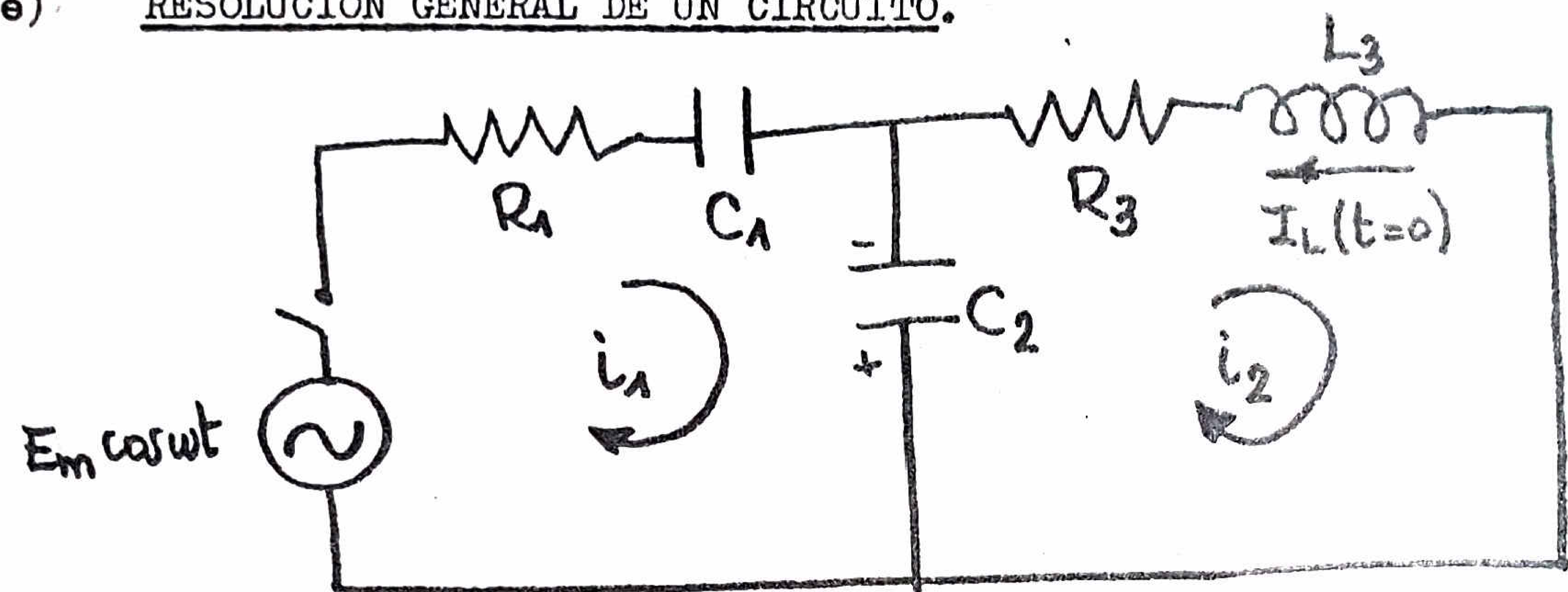
Identificando partes reales e imaginarias; sale:

$$L\{\cos wt\} = \frac{p}{p^2+w^2}$$

$$L\{\operatorname{sen} wt\} = \frac{w}{p^2+w^2}$$



e) RESOLUCION GENERAL DE UN CIRCUITO.



Con estas breves ideas de lam transformada de Laplace } intentaremos resolver un circuito de dos mallas, al que se la aplican en al instante t=0 una fuerza electromotriz $E_m \cdot \cos wt$.

Suponemos que en el instante t=0 por la autoinducción L_3 circula una corriente I_L y existe una tensión en bornas del condensador C_2 de valor V_0. Las ecuaciones integrodiferenciales de las dos mallas son:

$$R_1 i_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \cdot \int_0^T i_1 \, dt - \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^T i_2 \, dt = E_m \cdot \cos wt + V_c$$

$$-\frac{1}{C_2} \cdot \int_0^T i_1 \, dt + L_3 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_2 + \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^T i_2 \, dt + V_c = 0$$

Con las propiedades anteriormente mencionadas queda :

$$\text{Si} \quad L\{i_1(t)\} = I_1(p) \quad \text{y} \quad L\{i_2(t)\} = I_2(p)$$

$$L\left\{\int_0^T i_1 \, dt\right\} = \frac{I_1(p)}{p} \quad " \quad L\left\{\int_0^T i_2 \, dt\right\} = \frac{I_2(p)}{p}$$

$$L\{E_m \cdot \cos wt\} = \frac{E_m \cdot p}{p^2 + w^2} \quad " \quad L\{V_c\} = \frac{V_c}{p}$$

$$L\left\{\frac{di_2}{dt}\right\} = p \cdot I_2(p) - i_2(t=0) = p \cdot I_2(p) + I_L \quad \left(\text{ya que en } t=0 \quad i_2(t=0) = -I_L\right)$$

Luego nos queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} & R_1 I_1(p) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \frac{I_1(p)}{p} - \frac{1}{C_2} \cdot \frac{I_2(p)}{p} = \frac{E_m \cdot p}{p^2 + w^2} + \frac{V_c}{p} \\ & -\frac{1}{C_2} \cdot \frac{I_1(p)}{p} + L_3\left[p \cdot I_2(p) + I_L\right] + R_3 \cdot I_2(p) + \frac{1}{C_2} \cdot \frac{I_2(p)}{p} + \frac{V_c}{p} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas $I_1(p)$ y $I_2(p)$. Resuelto este , nos dará :

$$I_1(p) = f_1(p)$$

$$I_2(p) = f_2(p)$$

y mediante las transformadas inversas de $I_1(p)$ y $I_2(p)$, obtendríamos automáticamente su valor. Luego las ventajas de la aplicación para el estudio de los regímenes transitorios de la transformada de Laplace se pieden resumir así :

1) Conversión de los sistemas de ecuaciones integrodiferenciales en sistemas algebraicos .

2) Ausencia de las constantes indeterminadas que nos aparecen en la solución de las ecuaciones integrodiferenciales, al tener las condiciones iniciales del circuito automáticamente en cuenta .

3) Disponibilidadd de tablas que nos dan inmediatamente los pares de transformadasde Laplace que nos permiten un paso rápido al dominio del tiempo.

f) INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES INICIALES EXISTENTES EN UN CIRCUITO.

Se entiende por condiciones iniciales en un circuito, las tensiones existentes en bornas de los condensadores y las corrientes que circulan por las autoinducciones del circuito, en el momento anterior a la aplicación de la excitación.

La forma de tratarlo en la resolución de un circuito, mediante la transformada de Laplace , es la siguiente:

Condensadores :

La solución es muy simple: Se supone en serie con el condensador, una batería o una pila de la polaridad adecuada al signo de la tensión inicial en él.

Al aplicar la transformada de Laplace a la tensión en bornas del condensador C queda :

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{I(p)}{p} + \frac{V_c}{p}$$

Autoinducciones.

Sabemos que la tensión en bornas de una autoinducción , viene dada por y

que su transformada de Laplace es

$$\left[p\, I(p) - i(0)\right] \cdot L = p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot I_L$$

Al igual que en los condensadores , hemos de tener en cuenta el sentido de las corrientes cuando apliquemos los lemas de Kirchoff, que nos permiten establecer las ecuaciones integrodiferenciales.

g) TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE .

Por todo lo anterior, vemos que el problema de la resolución de circuitos ,mediante la aplicación de la transformada de Laplace, se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones, que al final nos dará en general una función de la forma :

$$I(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

El paso siguiente será calcular la transformada inversa de esta función de p. Normalmente I(p) suela ser de la forma :

$$I_p = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots\dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots\dots + b_1 \cdot p + b_0}$$

siendo a_i y b_i constantes ; y m y n números enteros positivos.

Para el cálculo de la transformada inversa , conviene seguir los siguientes pasos:

1) Observar si el grado del numerador es mayor que el del denominador; es decir m n. En este caso es necesario dividir; obteniéndose

$$I(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = Q(p) + \frac{S(p)}{B(p)}$$

donde Q(p) será en general un polinomio de grado(m-n) , y S(p) otro polinomio de grado inferior a n.

2) Descomponer B(p) en factores lineales o cuadráticos, con coeficientes reales.

Con objeto , de que el estudio sea menos complicado en su exposición, vamos a estudiar los distintos casos que pueden presentarse,por separado.

(a) Raices reales simples.

$$B(p) = (p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_v) \;\; // \;\; I(p) = \frac{S(p)}{B(p)} = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K_v}{p-p_v}$$

siendo p_1 p_2 p_3 .... p_v las distintas raices reales de B(p).

Los coeficientes K_j se calculan de la siguiente manera:

$$K_j = \lim_{p \to p_j} \left[(p-p_j) \frac{S(p)}{B(p)} \right] = \lim_{p \to p_j} \left[\frac{S(p)}{B'(p)} \right] \text{ // siendo } B'(p) = \frac{d}{dp} B(p)$$

Los términos que nos salen con exponentes positivos para p constituyen las derivadas de igual orden de la función escalón unidad, y los demás términos del desarrolloo , son los que dan lugar a las componentes transitorias, ya que

$$L^{-1}\left\{ \frac{K_j}{p-p_j} \right\} = K_j e^{p_j t} \quad \text{con} \quad j = 1; 2; 3; \cdots v.$$

Ejemplo.

$$I(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p+3)} = \frac{K_1}{p+1} + \frac{K_2}{p+3} \qquad \begin{matrix} p_1 = -1 \\ p_2 = -3 \end{matrix}$$

$$K_1 = (p+1).I(p)\Big|_{p=p_1} = \frac{p+2}{p+3}\Big|_{p=-1} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = (p+3).I(p)\Big|_{p=p_2} = \frac{p+2}{p+1}\Big|_{p=-3} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2}$$

$$I(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+3}$$

$$L^{-1}\{I(p)\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{1}{p+1} \right\} + \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{1}{p+3} \right\} = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$$

Si $I(p)$ es de la forma : $I(p) = \frac{S(p)}{p \cdot B(p)}$, su transformada inversa, podrá escribirse así:

$$L^{-1}\left\{ \frac{S(p)}{p \cdot B(p)} \right\} = \frac{S(0)}{B(0)} + \sum_{j=0}^{v} \frac{S(p_j)}{p_j \, B'(p_j)} \cdot e^{p_j t} = I(t) \quad (1)$$

Ejemplo.

Calculémoslo primero por el método explicado y despues mediante la expresión (1).

$$I(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)} \qquad \begin{cases} S(p) = p+2 \\ B(p) = (p+1)(p+3) \end{cases}$$

$$I(p) = \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3} \qquad \begin{array}{l} p_0 = 0 \\ p_1 = -1 \\ p_2 = -3 \end{array}$$

$$k_0 = p \cdot I(p)\Big|_{p=p_0} = \frac{p+2}{(p+1)(p+3)}\Big|_{p=0} = \frac{2}{3}$$

$$k_1 = (p+1)\, I(p)\Big|_{p=p_1} = \frac{p+2}{p(p+3)}\Big|_{p=-1} = \frac{-1+2}{(-1)(-1+3)} = -\frac{1}{2}$$

$$k_2 = (p+3)\, I(p)\Big|_{p=p_2} = \frac{p+2}{p(p+1)}\Big|_{p=-3} = \frac{-3+2}{(-3)(-3+1)} = -\frac{1}{6}$$

$$I(p) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p+3}$$

$$L^{-1}\{I(p)\} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

Mediante la aplicación de la expresión (1) tendríamos:

$$I(t) = \frac{S(0)}{B(0)} + \frac{S(p=p_1)}{p_1 \cdot B'(p=p_1)} e^{p_1 t} + \frac{S(p=p_2)}{p_2 \cdot B'(p=p_2)} \cdot e^{p_2 t}$$

$$S(p=p_1) = (p+2)\Big|_{p=-1} = -1+2 = 1$$

$$S(p=p_2) = p+2\Big|_{p=-3} = -3+2 = -1$$

$$B'(p) = (p+3)+(p+1) \begin{cases} B'(p=-1) = (-1+3) = 2 \;;\; p_1 B'(p=p_1) = (-1)\cdot 2 = -2 \\ B'(p=-3) = -3+1 = -2 \;;\; p_2 B'(p=p_2) = (-3)(-2) = 6 \end{cases}$$

$$S(0) = 2 \;,\; B(0) = 3$$

$$I(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{-2} e^{-t} + \frac{-1}{6} e^{-3t} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

(b) Raices reales múltiples.

Sea $I(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ donde $N(p) = (p-p_1)^{b_1} \cdot (p-p_2)^{b_2} \cdots (p-p_r)^{b_r}$

con $b_1 + b_2 + \cdots b_r = v \longrightarrow$ (grado del denominador).-

Cuando se presentan raices múltiples , es conveniente llamar a las constantes in indeterminadas, mediante dos subíndices; el primero de los cuales indica la raiz, y el segundo el orden de multiplicidad.

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p)}{(p-p_1)^r \cdot (p-p_2)^s \cdots\cdots} =$$

$$= \frac{A_{1r}}{(p-p_1)^r} + \frac{A_{1(r-1)}}{(p-p_1)^{r-1}} + \frac{A_{1(r-2)}}{(p-p_1)^{r-2}} + \cdots\cdots + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^2} + \frac{A_{11}}{p-p_1} +$$

$$+ \frac{B_{2s}}{(p-p_2)^s} + \frac{B_{2(s-1)}}{(p-p_2)^{s-1}} + \frac{B_{2(s-2)}}{(p-p_2)^{s-2}} + \cdots\cdots + \frac{B_{22}}{(p-p_2)^2} + \frac{B_{21}}{p-p_2} + \cdots\cdots$$

La constante A_{1r} puede calcularse simplemente ,por

$$A_{1r} = \left[(p-p_1) \cdot \frac{M(p)}{N(p)} \right]_{p=p_1} \quad (2)$$

El cálculo de $A_{1(r-1)}$ no puede seguirse de una manera similar.Para llevarlo a cabo derivamos los dos miembros de la expresión (2) con lo que obtenemos :

$$A_{1(r-1)} = \frac{d}{dp} \cdot \left[(p-p_1)^r \frac{M(p)}{N(p)} \right]_{p=p_1}$$

Repitiendo la derivación:

$$A_{1(r-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left[(p-p_1)^r \frac{M(p)}{N(p)} \right]_{p=p_1}$$

y generalizando :

$$A_{1(r-k)} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dp^k} \cdot \left[(p-p_1)^r \cdot \frac{M(p)}{N(p)} \right]_{p=p_1}$$

Como vemos en este caso, de descomposición en fracciones simples, nos encontramos con términos de la forma:

$$\frac{A_{k(q-j)}}{(p-p_k)^{q-j}}$$

cuya transformada inversa de Laplace, ya en el dominio del tiempo, es de la forma:

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_{k(q-j)}}{(p-p_k)^{q-j}} \right\} = A_{k(q-j)} \cdot \frac{1}{(q-j-1)!} \cdot t^{q-j-1} \cdot e^{p_k t}$$

Ejemplo.

$$I(p) = \frac{1}{(p+2)^3(p+3)} \qquad p_1 = -2 \;;\; p_2 = -3$$

$$I(p) = \frac{A_{13}}{(p+2)^3} + \frac{A_{12}}{(p+2)^2} + \frac{A_{11}}{p+2} + \frac{A_2}{p+3}$$

$$A_{13} = (p+2)^3 \cdot I(p)\Big]_{p=p_1} = \frac{1}{p+3}\Big|_{p=-2} = \frac{1}{-2+3} = 1$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dp}\left[(p+2)^3 \cdot I(p)\right]_{p=p_1} = \frac{-1}{(p+3)^2}\Big|_{p=-2} = \frac{-1}{(-2+3)^2} = -1$$

$$A_{11} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\left[(p+2)^3 \cdot I(p)\right]_{p=p_1} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{(p+3)^3}\right]_{p=-2} = 1$$

$$A_2 = (p+3)\, I(p)\Big]_{p=p_2} = \frac{1}{(p+2)^3}\Big]_{p=-3} = \frac{1}{(-3+2)^3} = -1$$

$$I(t) = L^{-1}\{I(p)\} = \frac{1}{2!}t^2 e^{-2t} - \frac{1}{1!} t e^{-2t} + e^{-2t} - e^{-3t} =$$

$$= e^{-2t}\cdot\left[\frac{t^2}{2} - t + 1\right] - e^{-3t}.-$$

(c) Raices imaginarias simples.

Siempre que en una ecuación existe una raiz imaginaria , aparece su conjugada, por lo que nos encontramos con fracciones del tipo:

$$\frac{K_1}{p+p_k} + \frac{K_2}{p+p_k^*} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} p_k = \alpha + \beta j \\ p_k^* = \alpha - \beta j \end{cases}$$

El procedimiento para determinarlas K_1 y K_2 es el mismo aplicado hasta ahora.

$$I(p) = \frac{S(p)}{B(p)} = \frac{S(p)}{(p^2+ap+b)(\quad)\ldots} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_1^*}$$

$$p_1 = \alpha + \beta j \;;\; p_1^* = \alpha - \beta j$$

$$A_1 = (p-p_1).I(p)\Big]_{p=p_1}$$

$$A_2 = (p-p_1^*).I(p)\Big]_{p=p_1^*} \qquad (3)$$

Cuyas transformadas de Laplace inversas darán:

$$L^{-1}\left\{\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_1^*}\right\} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 . e^{p_1^* t} = A_1 . e^{(\alpha+\beta j)t} + A_2 . e^{(\alpha-\beta j)t} =$$

$$= e^{\alpha t} . \left[A_1 . e^{j\beta t} + A_2 . e^{-j\beta t}\right] \qquad (4)$$

Empleando el desarrollo de Euler ,

$$e^{\pm jwt} = \cos wt \pm j . \operatorname{sen} wt$$

la expresión anterior, puede ponerse de la forma ,

$$e^{\alpha t} . \left[A_1 \cos\beta t + j A_1 \operatorname{sen}\beta t + A_2 \cos\beta t - j A_2 \operatorname{sen}\beta t\right] =$$

$$= e^{\alpha t} . \left[(A_1 + A_2) . \cos\beta t + j(A_1 - A_2) . \operatorname{sen}\beta t\right]$$

Pero por tratarse , de un fenómeno físico, cada término de la expresión, debe ser real. Esto impone limitaciones a los valores de A_1 y A_2 que requieren%:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{NUMERO REAL} \\ j(A_1 - A_2) &= \text{NUMERO REAL} \end{aligned}\right\}$$

Para satisfacer simultáneamente a estas dos condiciones es necesario que A_1 y A_2 sean complejos conjugados y de la forma

$$A_1 = A_0 . e^{j\phi}$$

$$A_2 = A_0 . e^{-j\phi}$$

siendo A_0 su módulo y ϕ su argumento.

Llevando estos valores a (4) sale:

$$= 2A_0 e^{\alpha t} . \left[\frac{e^{j(\beta t+\phi)} + e^{-j(\beta t+\phi)}}{2}\right] = 2A_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t+\phi) = 2A_0 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t+\psi)$$

siendo $\psi = \phi + 90°$

Volviendo a (3) , y resumiendo: A_1 es un complejo ,y A_2 su conjugado (por tanto no no es necesario calcular A_2).Llamando A_0 a su módulo y ϕ a su argumento, la transformada inversa se puede escribir directamente:

$$L^{-1}\left\{\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_1^*}\right\} = 2.A_0.e^{at}.\cos(\beta t+\phi) =$$

$$= 2.A_0.e^{at}.\operatorname{sen}(\beta t+\psi) \qquad \text{siendo } \psi = \phi + 90^\circ$$

Si lasc raices complejas son imaginarias puras , $p_1 = j\beta$;; $p_1^* = -j\beta$, aplicando las conclusiones anteriores, obtendríamos como transformada inversa:

$$L^{-1}\left\{\frac{A_1}{p-j\beta}+\frac{A_2}{p+j\beta}\right\} = 2A_0.\operatorname{sen}(\beta t+\psi) =$$

$$= 2.A_0.\cos(\beta t+\phi) \;\; , \qquad \text{siendo } \psi = \phi + 90^\circ$$

Ejemplo.

$$I(p) = \frac{100}{(p^2+25)(p+2)} = \frac{A_1}{p-5j} + \frac{A_2}{p+5j} + \frac{A_3}{p+2}$$

$$A_3 = (p+2)\,I(p)\Big|_{p=-2} = \frac{100}{p^2+25}\Big|_{p=-2} = \frac{100}{4+25} = \frac{100}{29} = 3{,}45$$

$$A_1 = (p-5j)\,I(p)\Big|_{p=5j} = \frac{100}{(p+5j)(p+2)}\Big|_{p=5j} = \frac{100}{(10j)(2+5j)} =$$

$$= \frac{-10j(5+2j)}{29} = -\frac{50}{29} - \frac{20}{29}j = A_0.e^{j\phi}$$

$$A_0 = \text{MODULO} = \sqrt{\frac{50^2+20^2}{29^2}} = \frac{10}{29}.5{,}38 = \underline{1{,}86}$$

$$\phi = \text{ARGUMENTO} = \text{arco tg}\,\frac{2}{5} = -158{,}2^\circ$$

(Diagrama: ejes βj, α; punto $-50/29$, $-20/29$; ángulo ϕ)

La transformada inversa es por tanto:

$$L^{-1}\{I(p)\} = 3{,}45\,e^{-2t} + 3{,}72\cos(5t-158{,}2^\circ) = 3{,}45\,e^{-2t} + 3{,}72\operatorname{sen}(5t-68{,}2^\circ)$$

$$\phi = -158{,}2^\circ \rightarrow \psi = \phi + 90^\circ = -158{,}2^\circ + 90^\circ = -68{,}2^\circ.$$

h) INTERPRETACION DE LAS SOLUCIONES.

Del desarrollo de las fracciones $\frac{A(p)}{B(p)}$ en fraciones simples, nos encontramos con los siguientes términos:

a) $\frac{E}{p}$, su transformada inversa será E que nos representa una respuesta constante.

b) $\frac{K}{p-p_k}$. Vimos que su transformada inversa era de la forma $K.e^{p_k t}$ que es una respuesta exponencial decreciente con el tiempo, ya que p_k siempre es negativo, al estar forzosamente situado en el semiplano izquierdo del plano complejo,ya que suponemos que estamos tratando con circuitos físicamente realizables.

c) Si el polinomio B(p) tiene alguna raiz p_k imaginaria pura, en el desarrollo encontraremos funciones del tipo

$$\frac{K_1}{p+p_k} + \frac{K_2}{p+p_k^*}$$

y la transformada inversa nos dará de la forma: $A.sen(p_k t+\psi)$; es decir, una respuesta sinusoidal permanente.

d) Si el polinomio tiene raices complejas conjugadas, de la forma $B(p) = \ldots. (p- p_k).(p - p_k^*)$; al ser $p_k=-\alpha+j\omega$ y $p_k^*=-\alpha-j\omega$; la respuesta que obtendremos será de la forma

$$A.e^{-at}..sen(\omega t+\psi)$$

es decir, sinusoidal amortiguada.

e) Si el polinpmio B(p) tiene raices múltiples , su transformada inversa será de la forma:

$$K.t^n.e^{p_k t}$$

que nos indica que es una respuesta lineal exponencial decreciente.

===========================

BIBLIOGRAFIA.

Wsewolod Warzanskyj : Redes Análisis (E.T.S.I.T.)

B. J. Starkey : Laplace transfors for electrical engineers. (Wireless engineer)

Lepage -Seely: General network analysis(Mc Graw - Hill)

Andre Angot: Complementos de Matemáticas (Dossat)

John J. D'Azzo: Sistemas realimentados de control. (Paraninfo).